

**Colle du 17/09 - Sujet 1**  
**Logique et fonctions réelles**

**Question de cours.**

1. Définir une fonction continue en  $a$ .
2. Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par  $u_0 = 2$ ,  $u_1 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+2} = 2u_{n+1} + 3u_n$ . Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 3^n + (-1)^n$ .

**Exercice 1.** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que  $\sqrt{n^2 + 1} \notin \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.** Pour tout entier  $n \geq 1$ , on définit la fonction  $f_n$  sur  $[-1; +\infty[$  par

$$\forall x \in [-1; +\infty[, \quad f_n(x) = \sqrt{x+1} e^{-nx}.$$

1. Soit  $n \geq 1$ . Dresser le tableau de variation de la fonction  $f_n$ .
2. Déterminer les extremums de la fonction  $f_n$  et préciser s'ils sont locaux ou globaux.
3. Quelles sont les limites de l'abscisse et de l'ordonnée du maximum de  $f_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
4. Pour tout  $n \geq 1$  on désigne par  $\mathcal{C}_n$  la courbe représentative de la fonction  $f_n$ . Montrer qu'il existe deux points par lesquels passent toutes les courbes  $\mathcal{C}_n$ .
5. Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_n$  au point d'abscisse 0 en fonction de  $n$ .
6. Déterminer la position relative de  $\mathcal{C}_{n+1}$  par rapport à  $\mathcal{C}_n$ .

**Colle du 17/09 - Sujet 2**  
**Logique et fonctions réelles**

**Question de cours.**

1. Énoncer les lois de Morgan.
2. Résoudre l'équation (E) :  $x = \sqrt{3 - 2x}$ .

**Exercice 1.** Étudier la fonction  $f : x \mapsto \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x + 2}\right)$ .

**Exercice 2.** Démontrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n^2 + 1$  n'est pas un multiple de 4.

**Colle du 17/09 - Sujet 3**  
**Logique et fonctions réelles**

**Question de cours.**

1. Comment obtient-on le graphe de  $g_1 : x \mapsto f(x) + a$ ? de  $g_2 : x \mapsto f(x + a)$ ? de  $g_3 : x \mapsto af(x)$ ? de  $g_4 : x \mapsto f(ax)$ ?
2. Montrer que  $\sqrt{2}$  est irrationnel.

**Exercice 1.** Soient  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $f : \begin{matrix} \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & ax + b \end{matrix}$ . Montrer que  $f$  est de signe constant si et seulement si  $a = 0$ .

**Exercice 2.** Étudier la fonction  $f : x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(|x|)}{x}}$ .